المجموعات المرتبة

نقول عن علاقة ثنائية R على مجموعة غير الخالية E انها علاقة ترتيب على E اذا وفقط اذا حققت الشروط الثلاثة التالية :

1) R انعكاسية أي xRx وذلك $\forall x \in E$
2) R تخالفية أي اذا كان xRy و yRx فإن $x = y$
3) R متعدية أي اذا كانت xRy و yRz فإن xRz

وبشكل عام فإننا سنكتب علاقة الترتيب $x \leq y$ (x أصغر أو يساوي y) بدلاً من xRy.

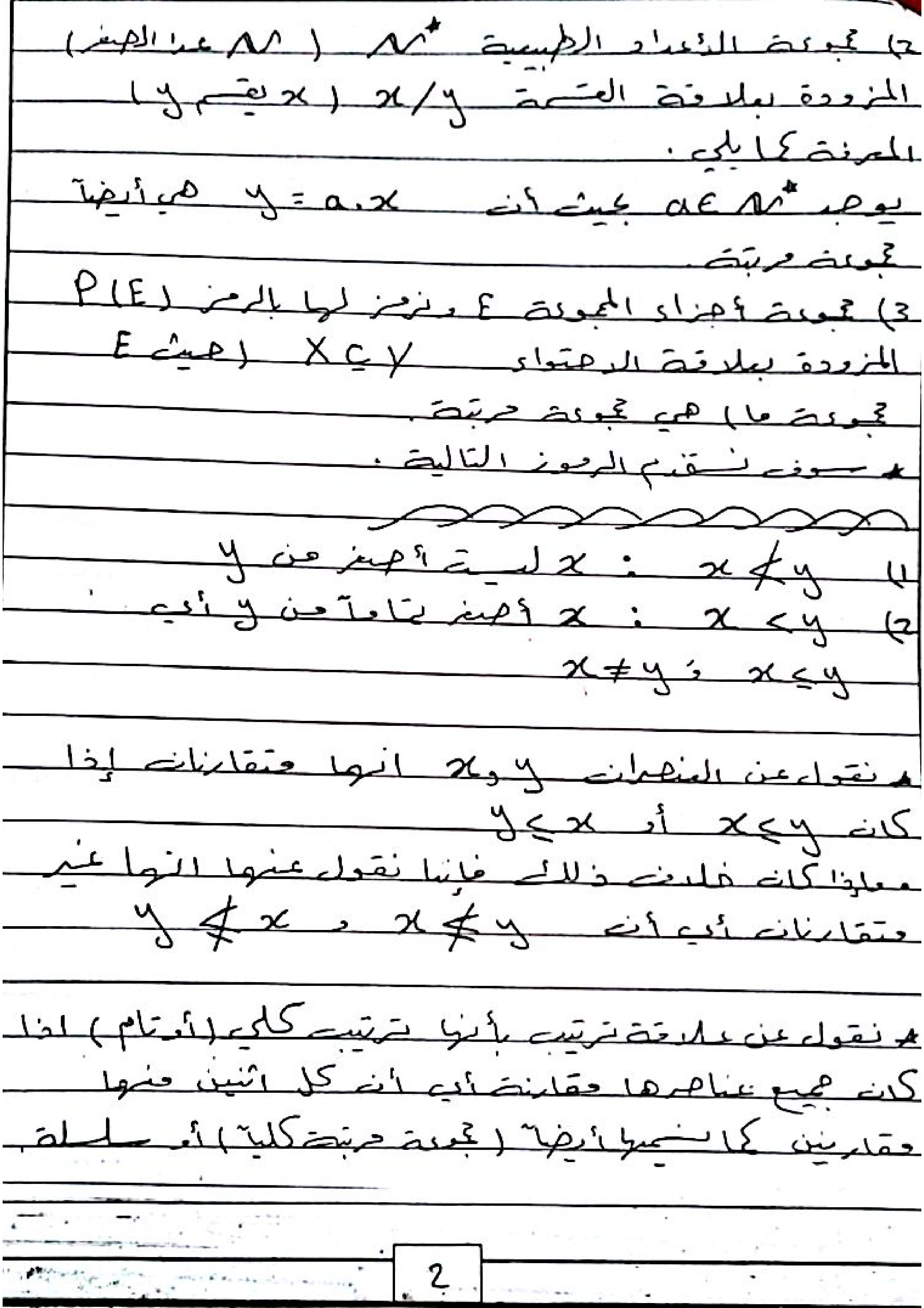
وفي حال وجود التباس وتجنباً للغموض فإننا نكتب $x \leq_E y$ تعني أن علاقة الترتيب معرفة على E

أو $x \leq_1 y$ (اذا كان يوجد أكثر من علاقة ترتيب)

* ان المجموعة E المزودة بعلاقة ترتيب سوف ندعوها مجموعة مرتبة.

أمثلة

1) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مزودة بعلاقة الترتيب المألوفة $x \leq y$ هي مجموعة مرتبة.



2) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ عدا الصفر) المزودة بعلاقة القسمة x/y (x يقسم y) المعرفة كما يلي:

يوجد $a \in \mathbb{N}^*$ بحيث أن $y = a.x$ هي أيضاً مجموعة مرتبة.

3) مجموعة أجزاء المجموعة E ونرمز لها بالرمز $P(E)$ المزودة بعلاقة الاحتواء $X \subseteq Y$ (حيث E مجموعة ما) هي مجموعة مرتبة.

* سوف نستخدم الرموز التالية:

1) $x \nleq y$: x ليست أصغر من y

2) $x < y$: x أصغر تماماً من y أي

$x \leq y$ و $x \neq y$

* نقول عن العنصران x و y أنهما متقارنان إذا كان $x \leq y$ أو $y \leq x$
وإذا كان خلاف ذلك فإننا نقول عنهما أنهما غير متقارنان أي أن $x \nleq y$ و $y \nleq x$

* نقول عن علاقة ترتيب بأنها ترتيب كلي (أو تام) إذا كان جميع عناصرها متقارنة أي أن كل اثنين منهما متقارنين كما نسميها أيضاً (مجموعة مرتبة كلياً) أو سلسلة.

أمثلة

1) $\mathbb{N}$ مع علاقة الترتيب العادية هي سلسلة.
2) $\mathbb{N}^*$ مع علاقة يقسم ليست سلسلة
3) $P(E)$ مع علاقة الاحتواء ليست سلسلة (اذا كانت E تحتوي على الأقل عنصرين)

ملاحظة

في حالة السلسلة اذا كان $x \not\leq y$ يكافئ $y < x$

الترتيب العكسي

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة فيمكن عندئذ تعريف علاقة ثنائية على E تكتب $x \geq y$ والتي تكافئ على كون $y \leq x$ ويمكن التحقق بسهولة انها علاقة ترتيب.

نسمي العلاقة $x \geq y$ بعلاقة الترتيب العكسية للعلاقة $x \leq y$

كما نكتب أيضا:

$x \not\geq y$: x ليست أكبر أو تساوي y

$x > y$: x أكبر تماما من y أي أن

$x \geq y$ و $x \neq y$

الترتيب المحاث (أو مقصور علاقة الترتيب)

لتكن $(E, \le)$ مجموعة مرتبة و A مجموعة جزئية غير خالية من E فإن أثر علاقة الترتيب $\le$ على $A \times A$ هي علاقة ترتيب على A نرمز لها بـ $x \le_A y$ والمعرفة بالشكل:

$x \le y$ حيث أن $x, y \in A$

تدعى هذه العلاقة علاقة الترتيب المحاث بـ $\le$ على A

مثال

لتكن المجموعة المرتبة $(\mathbb{N}^*, |)$ ولتكن $A = \{1, 2, 8, 64\}$

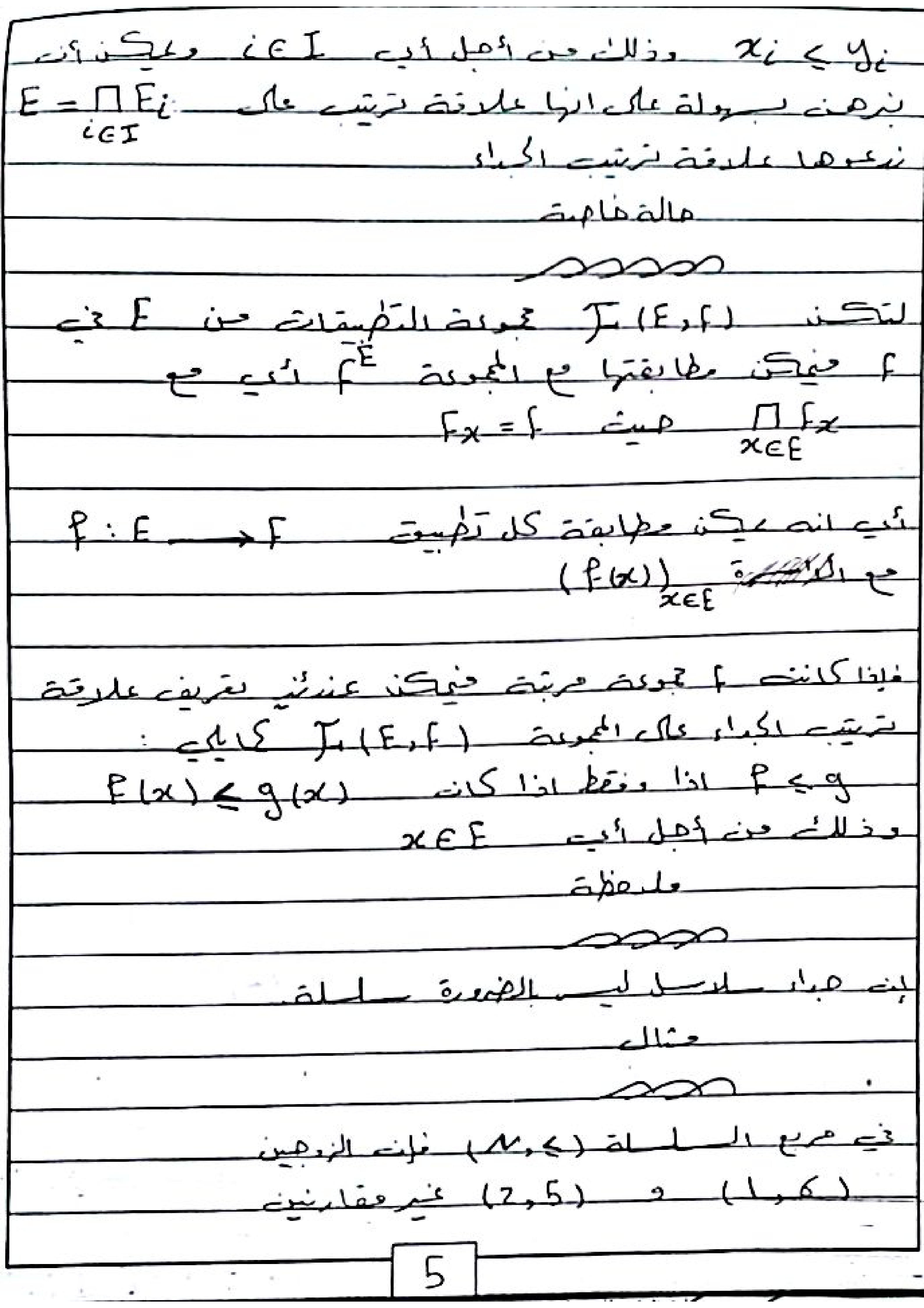
نلاحظ بأن A هي سلسلة من أجل الترتيب المحاث رغم أن علاقة الترتيب على $\mathbb{N}^*$ ليست كلية.

ترتيب الجداء

لتكن $\{(E_i, \le_i)\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات المرتبة

عندئذ يمكن أن نعرف على مجموعة الجداء $E = \prod_{i \in I} E_i$

العلاقة $(x_i)_{i \in I} \le (y_i)_{i \in I}$ كما يلي:



$x_i \le y_i$ وذلك من أجل أي $i \in I$ ويمكن أن نبرهن بسهولة على أنها علاقة ترتيب على $E = \prod_{i \in I} E_i$ ندعوها علاقة ترتيب الجداء

حالة خاصة

لتكن $\mathcal{F}(E,F)$ مجموعة التطبيقات من E في F فيمكن مطابقتها مع المجموعة F^E أي مع $\prod_{x \in E} F_x$ حيث $F_x = F$

أي أنه يمكن مطابقة كل تطبيق $f : E \longrightarrow F$ مع العائلة $(f(x))_{x \in E}$

فإذا كانت F مجموعة مرتبة فيمكن عندئذ تعريف علاقة ترتيب الجداء على المجموعة $\mathcal{F}(E,F)$ كما يلي:

$f \le g$ إذا وفقط إذا كان $f(x) \le g(x)$ وذلك من أجل أي $x \in E$

ملاحظة

إن جداء سلاسل ليس بالضرورة سلسلة.

مثال

في مربع السلسلة $(\mathbb{N}, \le)$ فإن الزوجين $(6,1)$ و $(2,5)$ غير متقارنين

أي أن $(\mathbb{N}^2, \leq)$ ليست سلسلة

مورفيزمات المجموعات المرتبة

لتكن $(E, \leq)$ و $(F, \leq)$ مجموعتان مرتبتان
و $f: E \longrightarrow F$ تطبيق من E إلى F فإننا
نقول عن f بأنه مورفيزم ترتيب أو تطبيق متزايد
اذا كان: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

وبشكل مشابه نعرف التطبيق المتناقص

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

والتطبيق المتزايد تماماً:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

والتطبيق المتناقص تماماً:

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

ملاحظات

1) التطبيق الثابت يكون بنفس الوقت متزايد ومتناقص
ولكن العكس ليس صحيح دوماً

مثال

لتكن المجموعة $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مرتبة بعلاقة تقسيم
و $F = \mathbb{N}$ مع علاقة الترتيب العادي
لنعرف f كما يلي:

$f(2) = f(4) = 1$ ، $f(3) = f(9) = 2$

فإن f يكون متزايد ومتناقص في نفس الوقت ولكنه ليس ثابتاً

2) كل تطبيق متزايد ومتباين يكون متزايد تماماً لكن ليس بالضرورة كل تطبيق متزايد تماماً يكون متباين

مثال

لنأخذ نفس المجموعات السابقة في المثال السابق حيث أن
$f(9) = 3 \qquad f(2) = 1 \qquad f(3) = f(4) = 2$

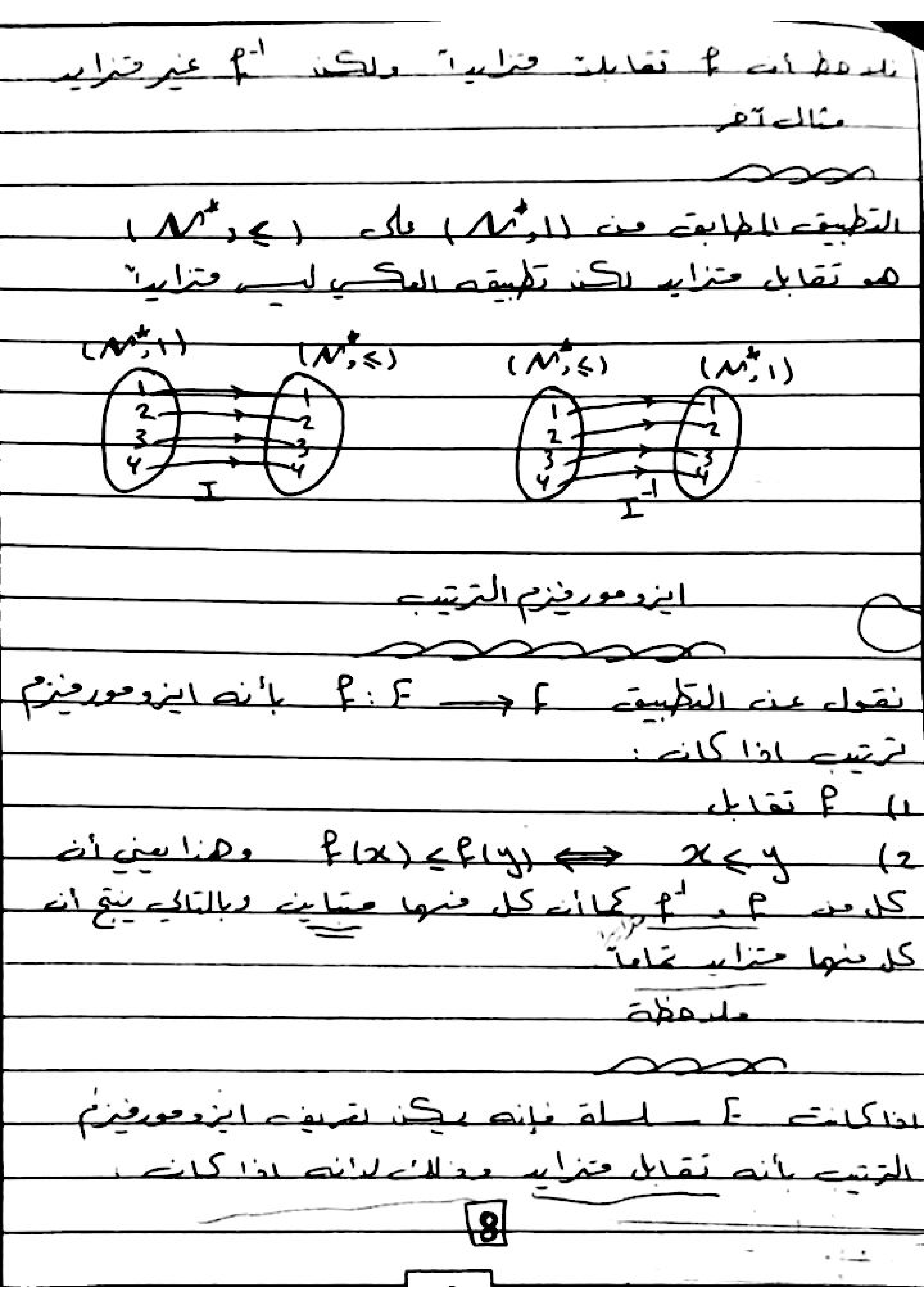
نلاحظ أن f متزايد تماماً لكنه ليس متباين

3) اذا كان f تقابلاً متزايداً فإن التطبيق العكسي له f^{-1} لا يكون بالضرورة متزايداً

مثال

اذا كانت $E = \{2, 3, 9\}$ ، $R = 1$
$F = \{2, 4, 8\}$ ، $R' = 1$

حيث أن $f(2) = 2 \qquad f(3) = 4 \qquad f(9) = 8$



نلاحظ أن f تقابلا متزايدا ولكن f^{-1} غير متزايد

مثال آخر

التطبيق المطابق من $(\mathbb{N}^*, |)$ على $(\mathbb{N}^*, \leq)$

هو تقابل متزايد لكن تطبيقه العكسي ليس متزايداً

ايزومورفيزم الترتيب

نقول عن التطبيق $f : E \longrightarrow F$ بأنه ايزومورفيزم ترتيب إذا كان:

1) f تقابل

2) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ وهذا يعني أن كل من f و f^{-1} [متزايد] كما أن كل منهما متباين وبالتالي ينتج أن كل منهما متزايد تماماً

ملاحظة

إذا كانت E سلسلة فإنه يمكن تعريف ايزومورفيزم الترتيب بأنه تقابل متزايد عندئذ لأنه إذا كان ،

$f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \nless x$

إذ أنه لو كان خلاف ذلك لكان

$f(y) < f(x) \Leftarrow y < x$

وهذا خلاف الفرض)

$\Rightarrow x < y$

أي أن f^{-1} متزايد

انتهت المحاضرة